Доклады Академии наук СССР
1961. Том 136, № 3

МАТЕМАТИКА

Б. А. СУББОТОВСКАЯ

О РЕАЛИЗАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ ФОРМУЛАМИ В БАЗИСЕ $\vee, \&, ^-$

(Представлено академиком А. И. Бергом 20 VIII 1960)

Будем рассматривать формулы в базисе $\vee, \&, ^-$. Число вхождений символов переменных в формуле F будем называть ее сложностью и обозначать через $L(F)$, а число $\min L(F)$, где минимум берется по всем формулам F, реализующим f в базисе $\vee, \&, ^-$, через $L(f)$. Очевидно, на языке контактных схем $L(f)$ представляет собой минимальное число контактов, достаточное для реализации функции f параллельно-последовательными схемами.

Функцию $\sigma + x_1 + \ldots + x_n \pmod 2$ обозначим символом f^n_σ. Как показано С. В. Яблонским ([1]),

$$L(f^n_\sigma) \leqslant {}^9/_8\, n^2.$$

В этой заметке будет показано, что

$$L(f^n_\sigma) > cn^{3/2},$$

где c — некоторая константа.

Для доказательства рассмотрим некоторый специальный класс формул в базисе $\&, \vee, ^-$ 0,1. Пусть $\{x_1, \ldots, x_i, \ldots\}$ — множество символов переменных. Выражения $0, 1, \bar{0}, \bar{1}, x_i, \bar{x}_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ назовем π-формулами и σ-формулами одновременно. Пусть $F_1, \ldots, F_s$ — π-формулы (соответственно σ-формулы), тогда $(F_1 \vee \ldots \vee F_s)$ назовем σ-формулой (соответственно $(F_1 \& \ldots \& F_s)$ назовем π-формулой). Класс всех π-формул и σ-формул обозначим символом W. Назовем формулу $(F_1 \vee \ldots \vee F_s)$ (соответственно $(F_1 \& \ldots \& F_s)$) расширением каждой из ее подформул F_i, которую будем в свою очередь называть компонентой этой формулы.

Очевидно, каждая компонента сама есть формула из W, и, следовательно, всякая компонента, отличная от формул вида $0, \bar{0}, 1, \bar{1}, x_i\bar{x}_i$, сама есть расширение своих компонент.

Две формулы F_1 и F_2, реализующие одну и ту же функцию, назовем эквивалентными (обозначение $F_1 \sim F_2$). Две эквивалентные формулы, каждая из которых получается из другой перестановкой компонент некоторых ее подформул, мы не будем различать.

Очевидно, для всякой формулы F в базисе $\vee, \&, ^-$ можно указать эквивалентную ей формулу F_1 из W такую, что $L(F) = L(F_1)$. Например, формуле $(((x_1 \vee x_2) \& \bar{x}_3) \& x_4)$ соответствует формула $((x_1 \vee x_2) \& \bar{x}_3 \& x_4)$ из W.

Для произвольной формулы F из W символом $L(F)$ будем обозначать как и прежде, число вхождений переменных в F.

Пусть $\hat{W}$ — множество формул из W, не содержащих подформул вида $0, 1, \bar{0}, \bar{1}$.

Лемма 1. *Для всякой формулы F, $F \in W$, не эквивалентной константе, можно указать эквивалентную ей формулу $\hat{F}$ из $\hat{W}$ такую, что $L(\hat{F}) \leqslant L(F)$.*

Утверждение леммы вытекает тривиальным образом из равенств $0 \vee x = x$, $0 \& x = 0, \bar{0} = 1$, $1 \vee x = 1$, $1 \& x = x$, $\bar{1} = 0$.

Пусть ψ — подформула вида x^σ * формулы F из W. Рассмотрим ее расширение $(\psi \circ \varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_s)$ в F, где $\circ$ означает $\vee$ или $\&$. Очевидно, при некотором значении τ вхождения переменной x в ψ ($\tau = \sigma$, если $\circ$ есть $\vee$, и $\tau = \bar{\sigma}$, если $\cdot$ есть $\&$) значение формулы $(\tau^\sigma \circ \varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_s)$ не зависит от выражения $\varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_s$. Назовем τ определяющим значением этого вхождения переменной x. Формулу, в которой расширение каждой подформулы вида x_i^σ ($i = 1, 2, \ldots$) не имеет других вхождений переменной x_i, назовем нормальной.

Пример. Формула $((x_1 \vee x_2) \& (x_1 \vee 0))$ является нормальной, а формула $(((x_1 \& \bar{x}_1) \vee x_2) \& x_3)$ не является нормальной.

Замечание. Если x^{σ_1} и x^{σ_2} — две различные подформулы нормальной формулы F, то их расширения не пересекаются.

Пусть f — функция алгебры логики; обозначим символом ${}^\tau f^x$ функцию, которая получится из f, если в ней переменную x заместить константой τ. Очевидно, если f не зависит от x существенно, то ${}^\tau f^x = f$. Аналогично, если F — формула, то символом ${}^\tau F^x$ обозначим формулу, полученную из F подстановкой во все вхождения переменной x константы τ. Если в F нет вхождений переменного x, то ${}^\tau F^x$ совпадает с F.

Лемма 2. *Для произвольной формулы F из W, не эквивалентной константе, можно найти такую эквивалентную ей нормальную формулу $\widetilde{F}$ из W, что*

$$L(\widetilde{F}) \leqslant L(F).$$

Доказательство. Пусть в формуле F из W есть подформула Ф вида $(\psi \circ \varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_s)$, где ψ имеет вид x^σ и τ — определяющее значение вхождения переменного x в ψ. Пусть далее выражение $\varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_s$ содержит свои вхождения переменного x. Рассмотрим формулу F_1, полученную из формулы F заменой в ней подформулы Ф формулой Φ_1, вида $(\psi \circ^{\bar{\tau}} \varphi_1^x \circ \ldots \circ^{\bar{\tau}} \varphi_s^x)$. Очевидно, для F и F_1 выполняется неравенство $L(F_1) < L(F)$. Покажем, что F_1 и F эквивалентны. Для этого достаточно показать, что $\Phi \sim \Phi_1$. Но, действительно, при $x = \tau$ значения формул Ф и Φ_1 определяются только значением компоненты ${}^\tau \psi^x$ и равны τ^σ, а при $x = \bar{\tau}$ эти значения совпадают по построению формулы Φ_1.

Очевидно, применяя описанный процесс, можно удовлетворить требованию леммы. Например, формуле $(((x_1 \& \bar{x}_1) \vee x_2) \& x_3)$ эквивалентна нормальная формула $(((x_1 \& \bar{1}) \vee x_2) \& x_3)$ из W.

Лемма 3. *Если нормальная формула F из $\hat{W}$, реализующая функцию f, содержит m вхождений переменной x, то найдется такое τ и такая формула F_1, реализующая функцию ${}^\tau f^x$, что выполняется неравенство*

$$L(F) \geqslant \frac{3}{2} m + L(F_1). \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $F_1, \ldots, F_m$ — расширения соответственно подформул $\psi_1, \ldots, \psi_m$ формулы F вида x^{σ_i}, $1 \leqslant i \leqslant m$, и $\tau_1, \ldots, \tau_m$ — соответственно определяющие значения вхождений переменной x в эти подформулы. Очевидно, никакие два из этих расширений не имеют общих вхождений переменных. Пусть τ — константа, встречающаяся в наборе $\tau_1, \ldots, \tau_m$ не менее чем $m/2$ раз. Рассмотрим формулу ${}^\tau F^x$. Очевидно, в ней не меньше чем $m/2$ подформул ${}^\tau F_i^x$ эквивалентны соответственно

---

* x^σ есть x при $\sigma = 1$ и $\bar{x}$ при $\sigma = 0$.

константам τ^{σ_i}. Заменим в формуле ${}^{\tau}F^{x}$ каждую подформулу ${}^{\tau}F_i^x$, эквивалентную константе τ^{σ_i}, этой константой и полученную формулу примем за F_1. Учитывая, что в каждой из подформул F_i, $i = 1,\ldots, m$, есть хотя бы одно вхождение переменного, отличного от x, убеждаемся, что F_1 удовлетворяет неравенству (1).

Следствие 1. Пусть переменная x имеет в нормальной формуле F из $\hat{W}$, реализующей функцию f от n переменных, максимальное число вхождений, равное m; тогда найдется такое τ и такая формула F_1, реализующая функцию ${}^{\tau}f^{x}$, для которых выполняется неравенство

$$L(F) \geqslant \frac{L(F_1)}{1 - 3/2m}.$$

Очевидно, рассматриваемое в условии следствия число m удовлетворяет неравенству $m \geqslant L(F)/n$. Подставив его в (1), получим требуемое неравенство.

Рассмотрим теперь формулу, реализующую функцию f_σ^n. Очевидно, формула ${}^{\tau}F_n^x$ реализует некоторую функцию $f_{\sigma_1}^{n-1}$.

Следствие 2. Если формула $\hat{F}_n$ из $\hat{W}$ реализует функцию f_σ^n, то

$$L(\hat{F}_n) \geqslant \prod_{i=2}^{n} \frac{1}{1 - 3/2i}\, L(f_\sigma^1). \qquad (2)$$

Неравенство доказывается по индукции с использованием следствия 1 леммы 3 и лемм 1 и 2.

Теорема. *Если F_n — произвольная формула в базисе $\vee$, $\&$, $\bar{}$, реализующая функцию f_σ^n*, то

$$L(F_n) \geqslant Cn^{3/2}.$$

Доказательство. Очевидно, $L(F_n)$ удовлетворяет неравенству (2). Имеем

$$\prod_{i=2}^{n} \frac{1}{1 - 3/2i} = \exp\Big[-\sum_{i=2}^{n} \ln\Big(1 - \frac{3}{2i}\Big)\Big] = \exp\Big[\sum_{k=2}^{n} \frac{3}{2k} + O(1)\Big] \geqslant C_1 n^{3/2},$$

откуда

$$L(F_n) \geqslant Cn^{3/2}.$$

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
5 VIII 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. В. Яблонский, ДАН, 94, № 5, 805 (1954).